

LA TRANSFORMADA WAVELET Y LOS FILTROS PASO-BAJO PASO-ALTO

Sandoya Fernando ¹

Resumen. En el presente trabajo se muestra la relación que existe entre el filtraje con filtros paso-banda en el sentido clásico y la transformada Wavelet de Haar y el análisis multirresolución, se analizan también las propiedades de reconstrucción perfecta que tiene este tipo de desarrollo. Se utiliza el lenguaje de procesamiento de señales conjuntamente con el Análisis Multirresolución para pasar del Universo matemático (continuo) al universo de representación (discreto).

Palabras Claves: Transformada Wavelet, Onditas, Análisis multirresolución, Filtraje paso-banda.

1. INTRODUCCIÓN

Históricamente la aplicación más común de las *Wavelets* u *Onditas*, y en realidad lo que dio origen a su desarrollo, es el procesamiento de señales. Una señal, definida brevemente, es cualquier sucesión de medidas numéricas. En el procesamiento de señales el interés principal radica en analizar y codificarlas con el propósito eventual de transmitir la señal codificada, que luego de recibida por el receptor deberá ser reconstruida con la menor pérdida, en este proceso las señales generalmente resultan contaminadas por ruido, y uno de los principales problemas del procesamiento de señales es como eliminar este ruido.

2. DEFINICIÓN Y PROPIEDADES DE LOS SISTEMAS

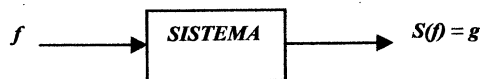
Primero describamos brevemente algunos términos que serán empleados en este artículo: en primer lugar el término *sistema*, el cual tiene una connotación bien genérica y amplia en matemáticas. Un sistema altera de diversas maneras la señal de entrada, generando luego una señal de salida. Un buen ejemplo es el sistema auditivo humano: el cual luego de captar un sonido, clasifica e interpreta la señal sonora de forma que al escuchar una frase somos capaces no solo de comprenderla, sino también, a veces, de identificar al locutor. Para realizar esta compleja tarea, se necesita de una separación del sonido recibido en diversas bandas, de frecuencias diferentes, a través del uso de un conjunto de filtros (realizados mecánicamente en la cóclea, membrana basilar, etc del sistema auditivo humano). De esta manera aparece el término *filtro* para describir a ciertos tipos de sistemas que poseen la característica de alterar las frecuencias de una señal de entrada. El término *filtro* viene justamente de ahí, pues hace una selección de

cuáles bandas de frecuencias serán alteradas: atenuadas o enfatizadas.

En el Universo matemático una señal es modelada por una *función*. Podemos pues modelar un sistema por una aplicación $S: F_1 \rightarrow F_2$ entre dos espacios de funciones. Los sistemas constituyen un modelo matemático para estudiar los diversos procesos que involucran el procesamiento de señales en el Universo físico.

En la figura 1 se observa un esquema que explica la acción de un sistema sobre una señal.

FIG. 1
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Acción de un sistema sobre una función



Así por ejemplo,

- El ojo humano constituye un sistema que procesa señales electromagnéticas en la faja visible del espectro;
- El sistema auditivo procesa señales de audio;
- Una cámara de televisión toma como entrada una señal electromagnética en la faja visible (como el ojo humano) y presenta como salida una señal de video.

2.1 Sistemas lineales y espacialmente invariantes :

Los sistemas generalmente se caracterizan de acuerdo con ciertas propiedades que poseen. Entre las principales propiedades que puede tener un sistema se tienen:

Linealidad:

Un sistema S es lineal si:

$$S(f+g) = S(f) + S(g)$$

$$S(\alpha f) = \alpha S(f)$$

Donde f y g son dos funciones (señales) de entrada y α un escalar

Si un sistema S es lineal y una señal f está representada por una descomposición atómica en serie de funciones:

¹ Sandoya Fernando, M.Sc., Profesor Agregado de la Escuela Superior Politécnica del Litoral (ESPOL);
(e-mail: fernandoss@yahoo.com)

$$f = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_j \rangle \psi_j$$

Entonces, la señal de salida $S(f)$ puede ser escrita como:

$$S(f) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_j \rangle S(\psi_j)$$

De esta manera, basta conocer la salida del sistema en los átomos ψ_j de la descomposición para procesar la salida de cualquier señal en esta representación.

Invarianza Espacial:

Un sistema S es *espacialmente invariante* si es posible efectuar desplazamientos en la señal antes o después de su procesamiento, obteniendo los mismos resultados. Es decir,

$$S(f(t-t_0)) = S(f)(t-t_0)$$

Estos sistemas son llamados "*invariantes en el tiempo*", cuando la variable independiente representa el tiempo.

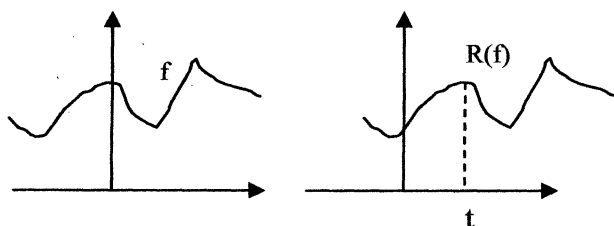
Dado $t_0 \in \mathbb{R}^+$, el operador $R: F_1 \rightarrow F_2$ definido por:

$$R(f) = f(t-t_0)$$

Es llamado *operador de retardo* por t_0 , u *operador de traslación* por t_0 . Geométricamente se puede entender la acción de este operador como una traslación del gráfico de f de t_0 unidades a la derecha, lo que equivale a retardar la señal, como se aprecia en la figura 2.

FIG. 2

La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Acción del operador de retardo.



Un sistema S es lineal y espacialmente invariante cuando un retardo en la entrada ocasiona un retardo igual en la salida:

$$SR_{t_0} = R_{t_0} S$$

Respuesta de impulso:

Una *respuesta de impulso* h de un sistema S es la imagen $h = L(\delta)$ de la señal δ de Dirac por el sistema.

Si f es una señal arbitraria tenemos:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(x-t) dt$$

Y si el sistema es lineal y espacialmente invariante, se tiene que:

$$\begin{aligned} S(f(x)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) S(\delta(x-t)) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) h(x-t) dt \end{aligned}$$

Esta última integral, representada generalmente con $f*h$ es conocida comúnmente como *producto de convolución* de f y h

Teorema:

Un sistema S lineal y espacialmente invariante, está determinado por su respuesta de impulso $h=S(\delta)$. Más precisamente, $S(f) = h*f$ para toda señal f . Es decir, la respuesta de impulso h caracteriza completamente al sistema, y por esta razón se denomina *núcleo de filtro*.

Respuesta de impulso finita:

Decimos que un sistema S tiene una respuesta de impulso finita si su respuesta de impulso tiene soporte compacto (el conjunto de soporte está formado por aquellos puntos en los cuales la función es diferente de cero), es decir:

$$\text{Sup}(S(\delta)) \subset [-L, L]$$

El nombre se origina del hecho de que en el dominio discreto la respuesta de impulso de sus filtros es representada por una sucesión finita.

Estabilidad:

Diversas condiciones de estabilidad pueden ser definidas en un sistema, cada una de ellas atendiendo a determinadas aplicaciones. Una condición común de estabilidad es exigir que el operador que define el sistema sea continuo:

$$\|S(f)\| \leq c \|f\|$$

$$\sup(S(f)) \leq c \sup(f)$$

Un sistema que satisface esta condición de estabilidad se denomina en la literatura de Procesamiento de señales como un sistema BIBO ("Bounded input - Bounded Output")

3. DISCRETIZACION DE SISTEMAS Y FILTROS

Con la finalidad de implementar modelos de sistemas en el computador debemos trabajar con sistemas discretos. Por esto es necesario buscar métodos de representación de sistemas, que son, métodos de representación de funciones. Los sistemas discretos operan sobre señales discretas.

Señales Discretas:

Los fenómenos del Universo físico poseen naturaleza discreta o continua, pero independientemente de esto, para fines de su

implementación, debemos trabajar con implementaciones discretas del sistema. Existen diversos métodos para representar una señal f , asociándola con una sucesión de "muestras" (f_n) , $n \in \mathbb{N}$. Utilizaremos la notación $f[n]$, $f(n)$ o f_n para indicar la n -ésima muestra de la señal.

La representación de una señal está dada por un operador $R: F \rightarrow l^2$, del espacio de señales F en el espacio de las sucesiones cuadrado sumables l^2 , tal que $R(f) = (f_n)$. La forma más común de representación de una señal está dada por su proyección en un subespacio cerrado $V \subset F$. Y por tanto si $\{\phi_j\}$ es una base ortonormal de este espacio, entonces:

$$R(f) = \sum_k \langle f, \phi_j \rangle \phi_j$$

Por tanto, las muestras de la señal son dadas por $f[j] = \langle f, \phi_j \rangle$. Otra forma común de muestreo es el muestreo uniforme de la señal, que con intervalo Δt es: $f[n] = f(n\Delta t)$.

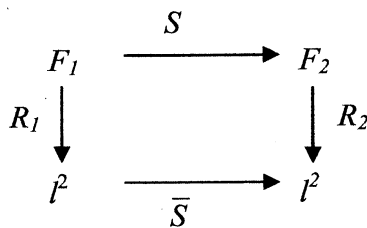
Luego, si la sucesión de representación es finita, se tiene un vector de representación:

$$(f_n) = (f[i], f[i+1], \dots, f[j])$$

Sistemas Discretos:

Dado un sistema $S: F_1 \rightarrow F_2$, si tomamos las representaciones $R_1: F_1 \rightarrow l^2$ y $R_2: F_2 \rightarrow l^2$, tenemos la situación presentada en la Figura 3

FIG. 3
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Diagrama con la representación discretizada de un sistema



Donde \bar{S} es la representación del sistema S ; es decir, el sistema discretizado.

Si S es lineal y F_1, F_2 tienen representación de dimensión finita, es decir: $R(F_1) = R^m$ y $R(F_2) = R^n$, entonces: $\bar{S}: R^m \rightarrow R^n$ es una transformación lineal, y por tanto puede ser representada por una matriz $n \times m$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

En el caso en que la representación de los espacios F_1 y F_2 no tiene dimensión finita,

tenemos: $\bar{S}: l^2 \rightarrow l^2$, y para la representación se puede usar matrices infinitas:

$$\begin{pmatrix} \vdots \\ y[-1] \\ y[0] \\ \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddots & \vdots & \dots & \ddots \\ \cdots & a_{-1,-1} & a_{-1,0} & \cdots \\ \vdots & a_{0,-1} & a_{00} & \vdots \\ \ddots & \vdots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vdots \\ x[-1] \\ x[0] \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Si el sistema es lineal y espacialmente invariante, sabemos que $S(f) = h * f$, donde h es el núcleo de filtro, $h = S(\delta)$. Y en el dominio discreto si $h = (h_n)$ y $f = (f_n)$, tenemos:

$$\begin{aligned} \bar{S}(f_n)[n] &= ((h_n) * (f_n))[n] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] f[n-k] \end{aligned}$$

Que es la expresión discreta del producto de convolución. Esta ecuación define la salida de un sistema discreto en una ecuación lineal en diferencias finitas:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k] f[n-k]$$

Operadores Upsampling y Downsampling:

Además del operador de retardo, otros dos operadores importantes en el estudio de filtros discretos son los operadores "Downsampling" y "Upsampling".

El operador **Downsampling** u operador de decimación de orden $q: l^2 \rightarrow l^2$ se define por:

$$(\downarrow q)(u_n) = (u_{nq})$$

Es decir, este operador descarta todos los términos de una sucesión, con excepción de los términos que son múltiplos de q .

El caso principal es para $q=2$, el cual descarta términos alternados de la sucesión, reteniendo sólo los de índice par:

$$(\downarrow 2)(u_n) = (u_{2n})$$

Y así la matriz de este operador está dada por:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & & \dots \end{pmatrix}$$

Es inmediato verificar que el operador **downsampling** no es inversible. Sin embargo posee un inverso por la derecha, que es el operador **upsampling**:

$$(\uparrow 2)(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots) = (\dots, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, \dots)$$

Es decir, el operador *upsampling* simplemente intercala ceros entre los términos de la sucesión de representación.

Es fácil probar que $(\downarrow 2)(\uparrow 2) = I$, y que en cambio $(\uparrow 2)(\downarrow 2) \neq I$, para esto observemos que la matriz del operador $(\uparrow 2)$ es:

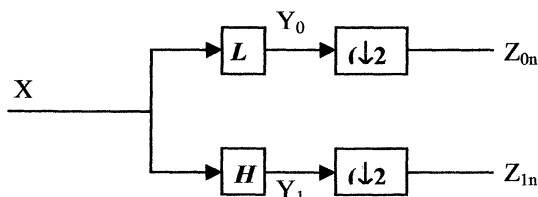
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ & 0 & 0 & & \\ & 1 & 0 & 0 & \\ & & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Banco de filtros:

Un *banco de filtros* es un sistema compuesto de diversos filtros y dos operadores de retardo: upsampling y downsampling. Aquí se considera un caso particular de banco de filtros de suma importancia en el análisis multirresolución en dominio discreto:

Consideremos un filtro de *paso-bajo* L y un filtro de *paso-alto* H , definimos un banco de filtros S usando esos dos filtros y los operadores upsampling y downsampling, de acuerdo al esquema representado en la Figura 4:

FIG. 4
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Representación del banco de filtros paso bajo – paso alto



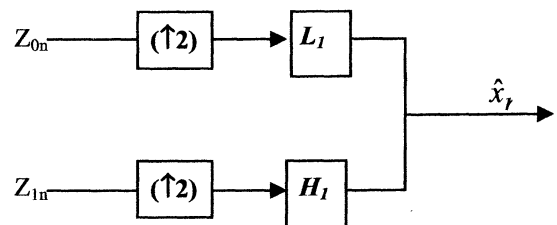
Las operaciones en el sistema de la figura 4 son las siguientes: cada señal de entrada (x_n) es procesada por el filtro L para obtener sus componentes de bajas frecuencias (y_{0n}), y también por el filtro H para obtener sus componentes de altas frecuencias (y_{1n}), después de este primer nivel de procesamiento las señales (y_{0n}) y (y_{1n}) constituyen juntas una representación de la señal original (x_n), doblando las muestras originales, es de esperar entonces que haya una redundancia en esa representación de la señal por sus componentes de bajas y altas frecuencias.

Entramos entonces con los operadores downsampling, $\downarrow 2$, para eliminar la mitad de las muestras en cada una de esas componentes. La señal de salida, $S(x)$, es por tanto una representación de la señal de entrada por sus componentes de bajas y altas frecuencias, y el

total de muestras en estas dos componentes es igual al número de muestras en la señal de entrada.

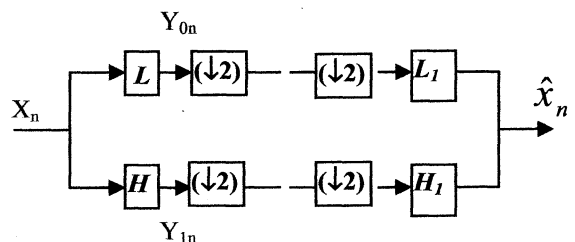
La pregunta que surge aquí es si se puede reconstruir la señal original (x_n) a partir de la señal $S(x_n)$ de salida. La respuesta a esta pregunta no es inmediata, ya que el operador downsampling, $\downarrow 2$, no es inversible. Una tentativa de solución es definir un banco de filtros de reconstrucción \tilde{S} de acuerdo al esquema mostrado en la Figura 5.

FIG. 5
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Esquema con el banco de filtros de reconstrucción



En la figura 5 se muestra como se utilizan los operadores upsampling en las dos señales de salida, junto con dos filtros L_1 y H_1 que procesan las señales resultantes y las combina de forma que se reconstruye la señal de entrada. La composición de los dos bancos de filtros, \tilde{S} o S es mostrada en la Figura 6.

FIG. 6
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Composición \tilde{S} o S de los bancos de filtros



El banco de filtros S es llamado *banco de análisis*, mientras que \tilde{S} es llamado *banco de síntesis* o *banco de reconstrucción*. Si $(x_n) = \tilde{S} \circ S(x_n) = (\hat{x}_n)$, se dice que se tiene una reconstrucción perfecta.

Representación matricial:

Supongamos que los filtros L y H están definidos por los productos de convolución:

$$L(x_n) = \sum_{k=0}^3 c(k)x(n-k)$$

$$H(x_n) = \sum_{k=0}^3 d(k)x(n-k)$$

Entonces, la matriz del banco de análisis S está dada por la matriz ampliada:

$$S = \begin{pmatrix} \downarrow L \\ - \\ \downarrow H \end{pmatrix}$$

Usando los resultados sobre la representación del operador $\downarrow 2$ por la matriz se obtiene que:

$$S = \begin{pmatrix} c(3) & c(2) & c(1) & c(0) & & \\ & c(3) & c(2) & c(1) & c(0) & \\ d(3) & d(2) & d(1) & d(0) & & \\ & d(3) & d(2) & d(1) & d(0) & \end{pmatrix}$$

Es claro que el problema de reconstrucción perfecta está relacionado con la invertibilidad de la matriz S , que siempre se tiene, por tanto tomamos el sistema de síntesis $\tilde{S} = S^{-1}$, y tenemos la reconstrucción perfecta. Obviamente si S es ortogonal: $\tilde{S} = S^T$.

Pero ¿para que se realiza esta desagregación sobre bancos de filtros y reconstrucción perfecta?. La respuesta a esta pregunta es fácil: Dado un análisis multirresolución, sabemos que su función de escala es un filtro paso-bajo y la Wavelet asociada es un filtro paso-alto. Se demuestra que en el dominio discreto ese análisis de multirresolución define un banco de filtros análogo al banco $\tilde{S}^\circ S$, que posee las propiedades de reconstrucción perfecta.

Relación entre el Banco de filtros y el análisis multirresolución:

En el dominio de universo matemático (continuo) el análisis multirresolución define un banco de filtros, en efecto:

Sea ϕ la función de escala en el análisis multirresolución en la convención de Daubechies:

$$\dots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \dots$$

Donde se conoce que: $V_{j-1} = V_j \oplus W_j$, siendo W_j el espacio de Wavelets asociado. Si $f \in L^2$, se tiene que:

$$\text{Proy}_{V_{j-1}}(f) = \text{Proy}_{V_j}(f) + \text{Proy}_{W_j}(f)$$

Así, la proyección $\text{Proy}_{V_j}(f)$ representa un filtraje de paso-bajo de la función f , y $\text{Proy}_{W_j}(f)$ representa un filtraje de f por un filtro de paso-alto definido por la transformada de Wavelet.

Intuitivamente el filtraje de paso-bajo ofrece una representación de la función f en la escala 2^j , y el filtraje de paso-alto ofrece los detalles que se pierden al representar a f en esa escala.

Usando la notación: $L_j(f) = \text{Proy}_{V_j}(f)$, y $H_j(f) = \text{Proy}_{W_j}(f)$, se tiene:

$$L_{j-1} = L_j(f) + H_j(f)$$

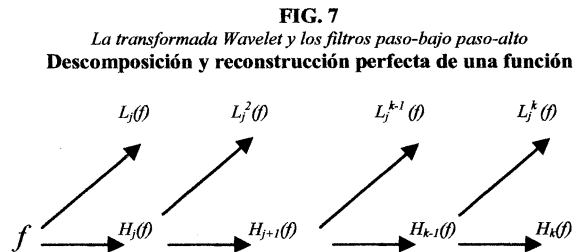
Y así, aplicando sucesivamente esa descomposición a la componente $L_j(f)$ de bajas frecuencias:

$$f = L_j^k(f) + H_k(f) + H_{k-1}(f) + \dots + H_j(f)$$

Es decir, la señal f es descompuesta en una componente de baja frecuencia (i.e. en una escala que no captura muchos detalles), $L_j^k(f)$, conjuntamente con componentes de altas frecuencias $H_n(f)$ que contienen los detalles perdidos en la representación de baja resolución de f .

La ecuación última afirma que podemos reconstruir la función f de manera exacta a partir de su componente de baja resolución, aumentando las componentes que contienen los detalles. Tenemos por tanto un banco de filtros con reconstrucción perfecta.

Las operaciones de análisis (descomposición) y de síntesis (reconstrucción) de ese banco de filtros se muestran en los diagramas de la Figura 7.



4. LA TRANSFORMADA WAVELET

Sea $\psi_k(t)$; $k \in \mathbb{N}$, una base ortonormal para el espacio $L^2(\mathbb{R})$ de las funciones cuadrado integrables (de manera similar se puede definir en el caso discreto para el espacio $l^2(\mathbb{R})$ de las funciones cuadrado sumables).

Definimos una expansión de la función f en una serie ortonormal como la C.L. de las $\psi_k(t)$ ponderadas por las proyecciones de f sobre cada una de ellas:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \langle f, \psi_k \rangle \psi_k(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k \psi_k(t)$$

Donde F_k define la transformada de f .

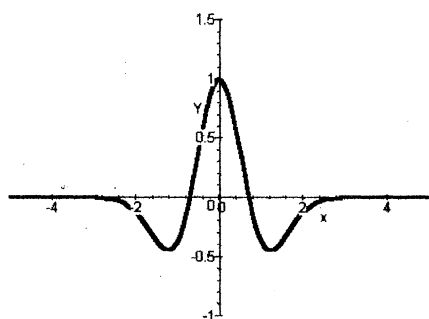
Si las funciones de base decaen a cero muy rápido, una mejor manera de que esta base cubra todo \mathbb{R} es a través de traslaciones y dilataciones de un único prototipo de función base (o función Wavelet madre) Ψ :

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \psi\left(\frac{t-\beta}{\alpha}\right)$$

Donde: α se denomina parámetro de escala (dilatación) y β parámetro de traslación. Así por ejemplo se tienen las funciones Wavelet madre de Haar y de sombrero mexicano como se muestra en la Figura 8a. y 8b.

FIG. 8a

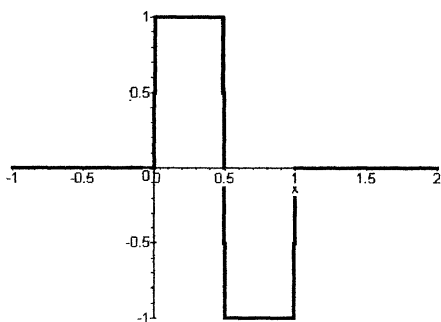
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Wavelet madre de "sombrero mexicano"



$$\psi(x) = (1 - 2x^2)e^{-x^2}$$

FIG. 8b

La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Wavelet madre de Haar



$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 0.5) \\ -1 & \text{si } x \in [0.5, 1) \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

5. ACCION DE LA TRANSFORMADA DE HAAR

En esta parte se aplica la transformada de Haar a una señal discreta.

Consideremos dos números a y b que pueden ser considerados como dos muestras consecutivas de una sucesión, así a y b posiblemente tienen alguna correlación que puede ser aprovechada, sea entonces la transformación:

$$T(a,b) = \left(s = \frac{a+b}{2}, d = b-a \right)$$

Es decir, se reemplaza a y b con su promedio y su diferencia s y d . La idea es que si a y b están altamente correlacionadas, el valor esperado absoluto de su diferencia d será pequeño. No se pierde ninguna información si solo se guarda s y d en lugar de a y b . En otras palabras T es inversible, y:

$$\begin{aligned} a &= s - d/2 \\ b &= s + d/2 \end{aligned}$$

Esta observación simple es la clave de la Transformada Wavelet de Haar. Considerando una señal s_n de 2^n valores muestrales, $s_{n,i}$:

$$s_n = \{s_{n,l} / 0 \leq l \leq 2^n - 1\}$$

$$s_n = \{s_{n,0}, s_{n,1}, s_{n,2}, s_{n,3}, \dots, s_{n,2^{n-2}-2}, s_{n,2^{n-2}-1}\}$$

Aplicando la transformada de promedio y diferencia a cada pareja $a = s_{2l}$ y $b = s_{2l+1}$, se observa que existen 2^{n-1} de estos pares ($l=0, 1, \dots, 2^{n-1}-1$), y denotando a los resultados por $s_{n-1,l}$ y $d_{n-1,l}$, es decir:

$$s_{n-1,l} = \frac{(s_{n,2l} + s_{n,2l+1})}{2}$$

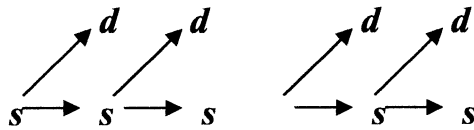
$$d_{n-1,l} = s_{n,2l+1} - s_{n,2l}$$

La señal de entrada s_n , la cual tiene 2^n muestras es descompuesta en dos señales: s_{n-1} , con 2^{n-1} promedios $s_{n-1,l}$ y d_{n-1} con 2^{n-1} diferencias $d_{n-1,l}$. Dados los promedios s_{n-1} y las diferencias d_{n-1} , se puede recuperar la señal original de entrada s_n , y podemos pensar en los promedios s_{n-1} como una representación "grosera" (es decir menos fina) de la resolución de la señal s_n , y en las diferencias d_{n-1} , como la información necesaria para ir desde la representación grosera hasta la señal original, es decir que d_n contiene el detalle que le falta a la representación grosera. Si la señal original tiene alguna coherencia local, por ejemplo si las muestras son valores de una función de variación acotada, entonces la representación grosera se

parecerá fielmente a la señal original y el detalle será muy pequeño y así puede ser representado eficientemente. Aplicando nuevamente la misma transformada a la señal grosera s_{n-1} . Tomando promedios y diferencias podemos descomponerla en una señal, aún más grosera, s_{n-2} , y otra señal diferencia d_{n-2} donde cada una de ellas contienen 2^{n-2} muestras.

Así sucesivamente se puede hacer esto n veces antes de agotar todas las muestras. Este procedimiento constituye la Transformada Wavelet de Haar, cuya acción se aprecia en la Figura 9.

FIG. 9
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Acción de la transformada de Haar

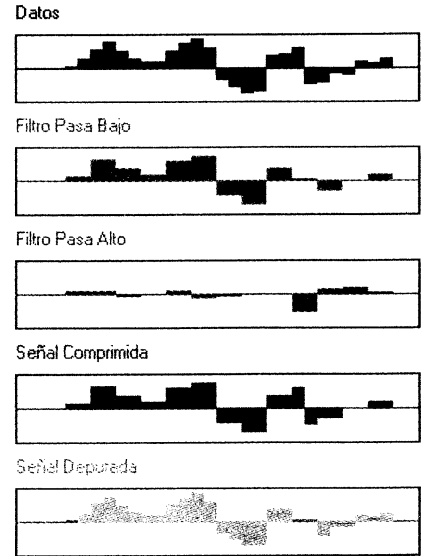


Así, terminamos guardando n señales de detalle d_j , $0 \leq j \leq n-1$, cada una con 2^j coeficientes, y una señal s_0 en la escala más grosera. El nivel de señal s_0 contiene solo una muestra $s_{0,0}$, la cual es el promedio de todas las muestras de la señal original. Usando la transformada inversa, partimos de s_0 y los d_j , $0 \leq j \leq n-1$ y se puede obtener nuevamente la señal original s_n . Nótese que el número total de coeficientes después de la transformada es 1 para s_0 más 2^j coeficientes por cada d_j ; así, son en total: $1 + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = 2^n$

coeficientes. El cual es exactamente el número de muestras de la señal original. Así, puede pensarse que la transformada de Haar es una aplicación lineal de matriz $N \times N$, $N=2^n$ sobre la señal original s_n , el costo de calcular la transformada es entonces de orden $\mathcal{O}(N)$, mientras que, por ejemplo, la transformada rápida de Fourier (FFT por Fast Fourier Transform.) tiene asociado un costo de cálculo de orden $\mathcal{O}(N \ln N)$.

En la Figura 10 se observa la acción de la transformada y el proceso de descomposición y reconstrucción casi perfecta para una señal de entrada dada

FIG. 10
La transformada Wavelet y los filtros paso-bajo paso-alto
Descomposición y reconstrucción de una señal con la transformada de Haar.



6. CONCLUSIONES

1. De todo este análisis, puede pensarse que la transformada de Haar es una aplicación lineal de matriz $N \times N$, $N=2^n$ sobre la señal original s_n , el costo de calcular la transformada es entonces de orden $\mathcal{O}(N)$, mientras que, por ejemplo, la transformada rápida de Fourier (FFT por Fast Fourier Transform) tiene asociado un costo de cálculo de orden $\mathcal{O}(N \ln N)$, de esta manera se puede observar la ventaja de la Transformada Wavelet sobre las mejores transformadas clásicas, como es la FFT.
2. Algo interesante constituye el hecho de que teorías que han tenido orígenes muy diferentes y que se han desarrollado de manera independiente luego resulta que tienen una estrecha relación. Este es el caso aquí demostrado, en el cual el Análisis Multirresolución, el filtraje paso-banda y las Transformadas Wavelets resultan como diferentes enfoques al mismo problema: el tratamiento de señales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS Y ELECTRÓNICAS

- [1] **SWELDENS, W. & SCHRÖDER, P.** (1992) *"Building your own Wavelets at home"* Ed. Kluwer Academics Publishers, New York.
- [2] **GOMES, J. ET AL.** (1997) Wavelets: *"Teoria e aplicações"*, Ed. Impa, Brasil
- [3] **MEYER, Y.** (1995) *"Wavelets, Algorithms & Applications"*, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, New York.
- [4] **ANTONIADIS, A., OPPENHEIM G.** (1996). *"Wavelets and statistics"*, Ed. Springer, New York.
- [5] **GOSWAMI, J., CHAN, A.** (1999) *"Fundamentals of Wavelets"*, Ed John Wiley & Sons, New York.